1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera:

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema AX = b según los valores del parámetro a.
b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando a = 1.

Solución

Sea $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A|=\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -(a)((a-3)\cdot 2 + 4) = -(a)(2a-6+4) = -(a)(2a-2)$.

De |A| = 0, tenemos $-(a)\cdot(2a-2) = 0$, de donde a = 0 y a = 1.

Si a ≠ 0 y a ≠ 1, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si a = 0, tenemos $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} C_2+2C_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -(-2)(0-1) = -2 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si a = 1, tenemos $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas proporcionales, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución, en nuestro caso infinitas.**

(b)
Resuelva el sistema cuando a = 1.

Ya hemos visto en el apartado (a) que para a = 1 el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución, como el rango es 2, sólo necesitamos dos ecuaciones. Utilizo la segunda y la tercera:

$\begin{cases} x - 2z = -1 \\ -x + y + 2z = 1 \text{ (E2+E1)} \end{cases} \approx \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y = 0 \end{cases}$. Tenemos y = 0, y tomando $z = m \in R$, resulta $x = -1 + 2m$.

La solución del sistema es (x, y, z) = (-1 + 2m, 0, m) con m ∈ R.

2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El <u>precio medio</u> de las 3 mascarillas es de 0’90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Solución

Llamamos "x" al precio de las mascarillas quirúrgicas desechables.
Llamamos "y" al precio de las mascarillas higiénicas.
Llamamos "z" al precio de las mascarillas quirúrgicas reutilizables.

De "el precio medio de las 3 mascarillas es de 0'90 € ", tenemos: $(x + y + z)/3 = 0'90$ € $\rightarrow$ $x + y + z = 2'7$ €.
De "un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €", tenemos: $30x + 20y + 10z = 56$ €.
De "otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €", tenemos: $20x + 25z = 31$ €.

Lo resolvemos por las transformaciones elementales de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 2'7 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \ (E_2-30E_1) \\ 20x + \quad 25z = 31 \ (E_3-20E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + y + z = 2'7 \\ -10y -20z = -25 \\ -20y + 5z = -23 \ (E_3-2E_2) \end{cases} \approx \begin{cases} x + y + z = 2'7 \\ -10y -20z = -25 \\ 45z = 27 \end{cases}$$

, luego **z =** 27/45 = 3/5 **= 0'6**, de la anterior $10y + 20(0'6) = 25 \rightarrow 10y = 13 \rightarrow$ **y = 1'3**; y entrando en la 1ª, $x + 1'3 + 0'6 = 2'7 \rightarrow$ **x = 0'8**.

*El precio de las mascarillas quirúrgicas desechables es **x = 0'8 €**.*
*El precio de las mascarillas higiénicas es **y = 1'3 €**.*
*El precio de las mascarillas quirúrgicas reutilizables es **z = 0'6 €**.*

3) Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

$$A + At = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Como $\det(C) = |C| = |A + A^t| =$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} C_2 + C_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = +(-1)\cdot(1+1) = -2 \neq 0, \text{ existe } C^{-1} = \frac{1}{|C|}Adj(C^t).$$

De $XA + XA^t = B \rightarrow X\cdot(A + A^t) = B$, por tanto $XC = B$. Multiplicando por la derecha la expresión $XC = B$ tenemos: $XCC-1 = B\cdot C-1 \rightarrow X\cdot I = B\cdot C^{-1}$, **luego $X = B\cdot C^{-1}$**.

$$C^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ Adj(C^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ C^{-1} = \frac{1}{|C|}Adj(C^t) = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Luego } \mathbf{X = B\cdot C^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$.

Solución

Ponemos la recta r en vectorial:

$r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \ (E_1-E_2) \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} x \quad - 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$. Tomando $z = m \in R$, resulta $x = 1 + 3m$ y entrando en la 2ª tenemos $2(1+3m) + y - (m) + 2 = 0$, de donde $y = -4 - 5m$. La recta es r: $(x, y, z = (1 + 3m, -4 - 5m, m)$, con lo cual un punto de "r" es $A(1, -4, 0)$ y un vector director es $\mathbf{u} = (3, -5, 1)$.

Para el plano π' necesitamos un punto, el $A = (1, -4, 0)$ (contiene a r) y dos vectores independientes uno el $\mathbf{u}$ = $= (3,- 5, 1)$ (contiene a la recta r), y el otro el $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ (el plano es perpendicular a π).

$\boldsymbol{\pi' \equiv \det(AX, u, v) = 0} = \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (x-1)(-15+1) - (y+4)(9-2) + (z)(-3+10) =$

$\boldsymbol{= -14x - 7y + 7z + 42 = 0 = 2x + y - z - 6 = 0.}$

5) Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to0}(1 + x)^{2/tg(x)}$.

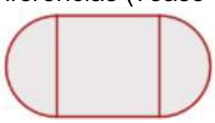
Solución

$\lim_{x\to0}(1 + x)^{2/tg(x)} = (1 + 0)^{\frac{2}{tg(0)}} = (1)^{\infty}$. Indeterminación del número "e".

Recordamos la regla de L'Hôpital (L'H), que nos dice que si "f" y "g" son funciones continuas en $[a -\delta, a + \delta]$, derivables en $(a -\delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\to\infty$)

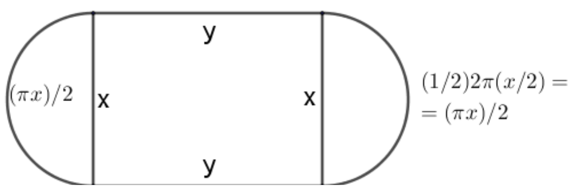
$\lim_{x\to0}(1 + x)^{2/tg(x)} = e^{\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{tg(x)}\right)\cdot(1+x-1)} = e^{\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{tg(x)}\right)} = e^{\left\{\frac{0}{0}, L'H\right\}} = e^{\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{1/\cos^2(x)}\right)} = e^{\left(\frac{2}{1/(1)^2}\right)} = e^2.$

6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo).



Su superficie se desea que sea de $4 + \pi$ m^2. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.

Solución



Recordamos que la longitud de una circunferencia de radio "r" es $2\pi(r)$ y el área del circulo πr^2.

Es un problema de optimización.

La función a optimizar es la suma de las longitudes.
$L = 2x + 2y + 2(\pi x)/2 = 2x + 2y + \pi x$.

Relación: Superficie $= 4 + \pi = xy + \pi(x/2)^2 = xy + (\pi x^2)/4$, de donde $y = (4 + \pi)/x - (\pi x)/4$, y la función a optimizar sería: $L(x) = 2x + 2[(4+\pi)/x - (\pi x)/4] + \pi x = 2x + (8+2\pi)/x - (\pi x)/2 + \pi x = 2x + (\pi x)/2 + (8+2\pi)/x$.

Calculamos la 1ª derivada L '(x), la igualamos a 0 y obtenemos las soluciones que serán los posibles extremos, calculamos la 2ª derivada L ''(x) y sustituimos las soluciones para ver que efectivamente es un mínimo (tiene que salir > 0).

$L'(x) = 2 + \pi/2 - (8 + 2\pi)/x^2 = 2 + \pi/2 - (8 + 2\pi)\cdot x^{-2}$; $L''(x) = -(-2)\cdot(8 + 2\pi)\cdot x^{-3} = (16 + 4\pi)/x^3$

De $L'(x) = 0$ tenemos $2 + \pi/2 - (8 + 2\pi)/x^2 = 0 \rightarrow 2 + \pi/2 = (8 + 2\pi)/x^2 \rightarrow x^2 = (8+2\pi)/(2+\pi/2) =$
$= (16+4\pi)/(4+\pi) = 4$, de donde resulta que $x = \pm\sqrt{(4)} = \pm 2$, que son los posibles extremos. Pero como x es un longitud sólo queda la solución positiva $x = +2$.

Como $L''(2) = (16+4\pi)/8 > 0$, resulta que $x = 2$ es un mínimo de $L(x)$.

Los datos pedidos son: altura x = 2 m y base y = ((4+π)/2 - π/2) = 2 m, es decir el campo es un cuadrado de lado 2 m junto a dos semicírculos de radio 2/2 = 1 m.

7) Dada la siguiente función $f(x) = \frac{-x^2}{2} + 2\cdot\ln(x+1)$:
a) (0,25 puntos) Calcule el dominio de f(x).
b) (1,75 puntos) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Solución
(a)
Calcule el dominio de f(x).

Sabemos que ln sólo existe para números positivos, luego $x + 1 > 0$, de donde $x > -1$. **El dominio es el intervalo abierto (-1, +∞).**
(b)
Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Nos piden la monotonía, que es el estudio de f '(x).
$f(x) = \frac{-x^2}{2} + 2\cdot\ln(x+1)$; $f'(x) = -x + \frac{2}{x+1}$.
De $f'(x) = 0$, tenemos $0 = -x + \frac{2}{x+1}$, es decir $-x^2 - x + 2 = 0 = x^2 + x - 2 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, de donde resulta $x = -2$ (*no está en el dominio x > -1*) y $x = 1$ posible extremo.
Como $f'(0) = 0 + \frac{2}{1} = 2 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-1, 1).**
Como $f'(2) = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (1, +∞).**
Por definición x = 1 es un máximo relativo que vale $f(1) = \frac{-1}{2} + 2\cdot\ln(2) \cong 0'88629$

8) (2 puntos) Calcule la siguiente integral: $\int x^3\cdot e^{x^2}dx$
Solución
$$\int x^3\cdot e^{x^2}dx = \int x^2\cdot e^{x^2}\cdot xdx = \begin{Bmatrix}\text{Cambio: } x^2 = t \\ 2xdx = dt;\ xdx = dt/2\end{Bmatrix} = \int t\cdot e^t\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot\int t\cdot e^t\cdot dt = \frac{1}{2}\cdot I_1$$
$$I_1 = \int t\cdot e^t dt = \begin{Bmatrix}u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = \int e^t dt = e^t\end{Bmatrix} = t\cdot e^t - \int e^t dt = t\cdot e^t - e^t = \begin{Bmatrix}\text{Quito} \\ \text{Cambio: } x^2 = t\end{Bmatrix} = x^2\cdot e^{x^2} - e^{x^2}$$
Luego $\int x^3\cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot I_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2\cdot e^{x^2} - e^{x^2}\right) + K.$

9) En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% dispo-

nía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.
a) (1,25 puntos) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).
b) (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.
Solución
(a)
Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

Sean los sucesos A = "disponer de ordenador" y B = "disponer de móvil".

Me están pidiendo **p(tener alguno de los dos dispositivos (o ambos)) = p(A o B) = $p(A\cup B)$**.

Nos dan p(A) = 80% = 0'8, p(B) = 15% = 0'15, p(tener ambos) = p(A y B) = $p(A\cap B)$ = 10% = 0'1.

Tenemos **$p(A\cup B)$ =** $p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'8 + 0'15 - 0'1$ **= 0'85.**
(b)
Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

Me están pidiendo **p(no tener ninguno) = p(noA y noB) = $p(A^C\cap B^C)$** = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ =
= {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B) = 1 - 0'85$ **= 0'15.**

10) (2 puntos) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.
a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?
b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?
c) (0,5 puntos) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?
Solución
(a)
¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

Si X es la variable "tiempo en llegar a la universidad", vemos que X sigue la normal $N(\mu, \sigma) = N(30, 5)$.
Me piden **$p(X \le 40)$ =** {Tipificamos} = $p\left(Z \le \frac{40 - 30}{5}\right) = p(Z \le 2)$ **= 0'9772.**

(b)
¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?
Me piden **$p(20 \le X \le 40)$ =** {Tipificamos} = $p\left(\frac{20 - 30}{5} \le Z \le \frac{40 - 30}{5}\right) = p(-2 \le Z \le 2) = p(Z \le 2) - p(Z \le -2)$ =
= {suceso contrario} = $p(Z \le 2) - (1 - p(Z \le -2))$ = **0'9772 – 1 + 0'9772 = 0'9544.**

(c)
El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?
Me piden **p(llegar tarde) = $p(X \ge 40)$ =** {Tipificamos} = $p\left(Z \ge \frac{40 - 30}{5}\right) = p(Z \ge 2)$ = {suceso contrario} =
= $1 - p(Z \le 2) = 1 - 0'9772$ **= 0'0228.**